

周期関数による 3D パターンの生成

森田克己

要旨

筆者は、これまで、独自に開発した幾何学模様生成システムを適用し様々な模様を生成し、その有用性について検証してきた。そのシステムは、周期関数を用い、3次元上において生成した模様を平面図によって結果を示すものである。本稿では、そのシステムを発展させた。新規に設定したのは、第1に、線形状を帯形状に変更した点、第2に、xy平面における周期パターンをアフィン変換しyz平面を構築した点、第3に、yz平面における周期パターンの軸に対する平行移動をした点があげられる。以上に基づいて、3Dパターンのバリエーションの生成を行った。本稿は、美術、デザイン等の分野における造形表現に活用できる新しい方法論を提供しようとするものである。

キーワード：幾何学模様、3Dパターン、周期関数

1. はじめに

筆者は、これまで、独自に開発した幾何学模様生成システムを利用して様々な模様を生成してきた^{[1][2][3]}。このシステムは3次元上で生成した模様を平面図で示すものである。模様は、線の重なりの特徴がある2Dパターンとして位置づけることができる。本稿では、幾何学模様生成システムを発展させ、2Dパターンから3Dパターンを生成できるシステムを構築した。

2. 3Dパターン生成のための設定

幾何学模様生成システムをベースとし、次の設定を考案した。

2.1. 軸とモチーフの設定

(1) 軸の設定

軸は、2次曲線を3次曲線に変換したものを適用する。本稿では2次曲線を円に限定する。

(2) モチーフの設定

モチーフは2次曲線を適用する。種類は、楕円、外サイクロイド、内サイクロイドに限定する。

2.2. 形状の設定

3Dパターンの形状設定は次の通りである。

(1) 形状のベースとして帯を適用する。

(2) 帯の幅により3Dパターンの面を生成する。

2.3. 3Dパターン生成のための方法

前拙稿^[4]における2Dパターンの生成はアフィン変換を適用した次の方法によるものである。1. xy平面におけるモチーフをz軸を基にして自転させる。2. xy平面における周期パターンをyz平面にアフィン変換する。3. yz平面における周期パターンを軸に対し平行移動させる。

本稿における3Dパターンの生成の基本構想を図1に示す。

図1aは、 θ を $(\sqrt{5}+1)/2$ としたとき、偏平率を θ で示すことができる楕円であり、汎用黄金楕円と呼ぶ。図1bは汎用黄金楕円をy軸を基に、反時計回りに 90° 回転した状態を示す。

(1) xy平面におけるモチーフをz軸を基にして自転させる(図1c)。このとき生成した周期パターンをxyパターンと呼ぶ。

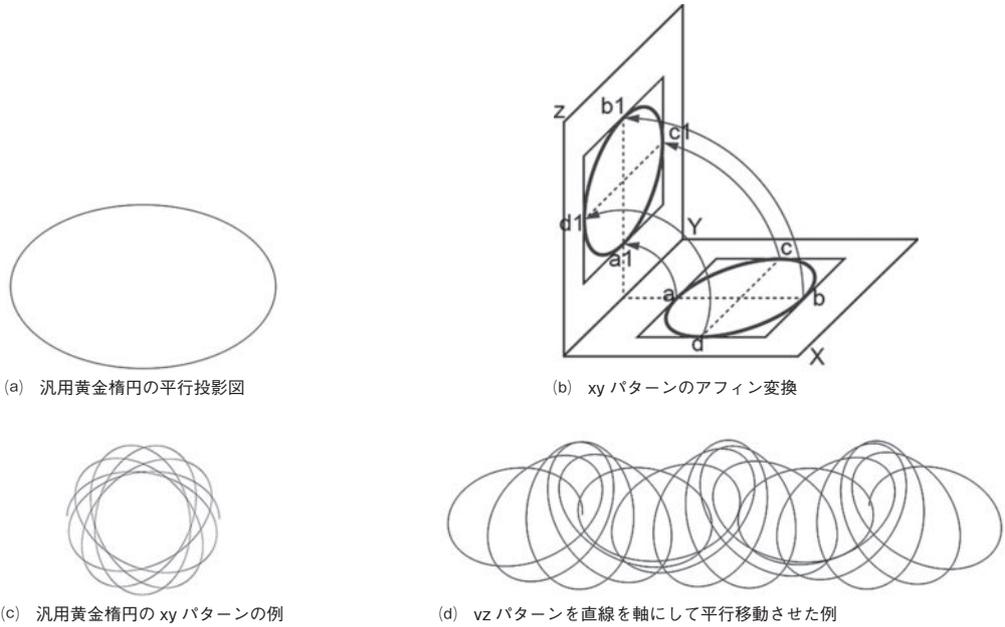


図1 3Dパターン生成のためのシステム

- (2) xyパターンをy軸を基にして反時計回りに90°回転させる。これをyzパターンと呼ぶ。
- (3) yzパターンを軸を基にして平行移動させる(図1d)。

2.4. 3Dパターンの基本形

2.4.1. 汎用黄金楕円モチーフとし直線を軸とした場合

汎用黄金楕円をモチーフとした例を次に示す。

図2aは、汎用黄金楕円をモチーフとし、直線を軸として生成した帯形状の3Dパターンである。これをベースとし、帯の幅の値を増加させ生成した面形状の3Dパターンを図2bに示す。さらに、汎用黄金楕円の自転の周期を変更し生成した3Dパターンを図2cに示す。これにより、ねじれ面の形状の違いが確認できる。

帯のパラメータを加え生成形状の汎用黄金楕円を生成するための式を式1に示す。

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 \theta \cos[iu + t] \\ y_0 &= a_0 \sin[u + t] \end{aligned} \tag{1}$$

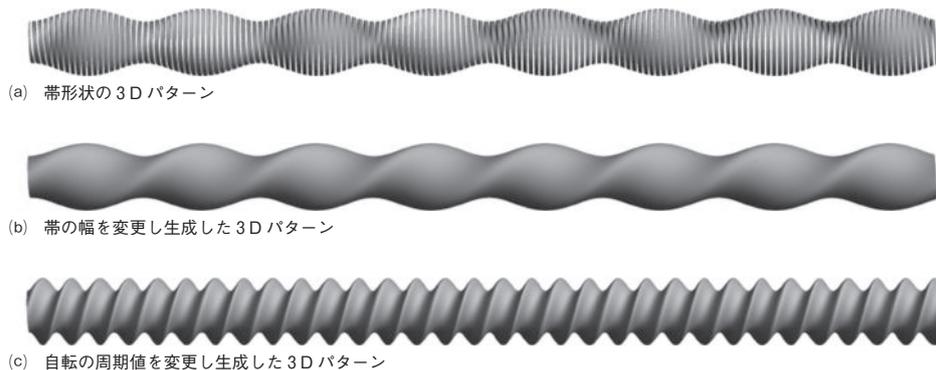


図2 汎用黄金楕円をモチーフとし直線を軸とした3Dパターンの例

2.4.2. 汎用黄金楕円をモチーフとしサインカーブを軸とした場合

図 3a, 図 3b, 図 3c は, 汎用黄金楕円をモチーフとしサインカーブを軸として生成した面形状の 3D パターンである。図 3a をプロトタイプとして, 汎用黄金楕円の自転の周期値を増加させたねじれ形状のバリエーションを図 3b と図 3c に示す。

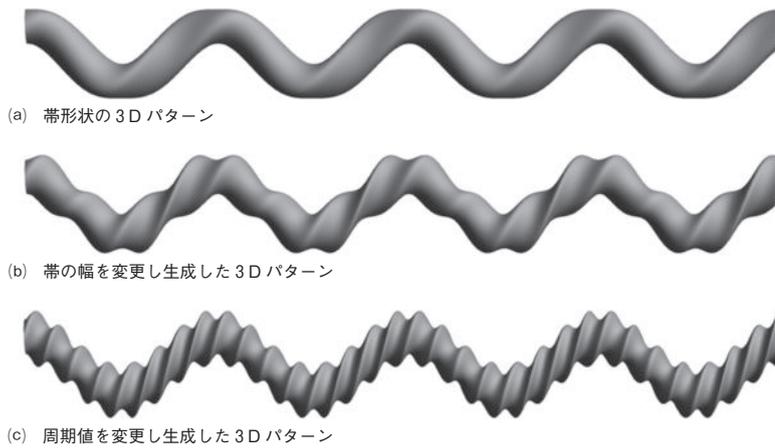


図 3 汎用黄金楕円をモチーフとしサインカーブを軸とした 3D パターンの例

2.5. 外サイクロイドをモチーフとしサインカーブを軸とした 3D パターン

大円と小円の比率が 4 : 1 の外サイクロイドをモチーフとしサインカーブを軸として生成した 3D パターンの例を図 4 に示す。

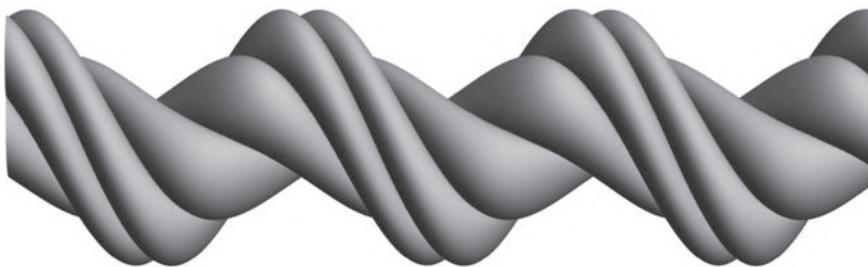


図 4 外サイクロイドをモチーフとしサインカーブを軸とした 3D パターンの例

2.6. 内サイクロイドをモチーフとしサインカーブを軸とした 3D パターンの生成

大円と小円の比率が 4 : 1 である内サイクロイドをモチーフとしサインカーブを軸として生成した 3D パターンの例を図 5 に示す。

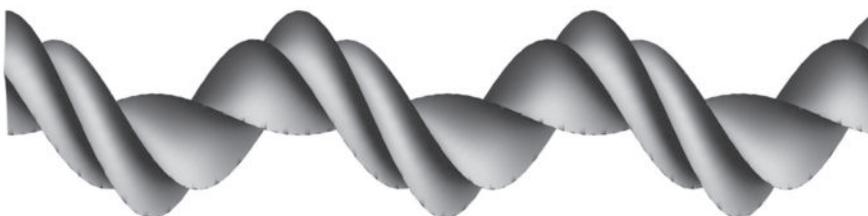


図 5 内サイクロイドをモチーフとしサインカーブを軸とした 3D パターンの例

3. 円を軸とした3Dパターンの生成のための設定

円を軸とした3Dパターン生成のための設定は次の通りである。

s_1 は軸に対して平行移動させるときの周期値, s_2 はモチーフを自転させるときの周期値であり, 各々次式で示す。 $s_1 = d\pi/j_1$ $s_2 = e\pi/j_2$

(1) モチーフの設定

線形状のモチーフは, パラメータ t, u により, 次式で示すことができる。

$$\begin{aligned}x_0 &= F(t, u) \\y_0 &= G(t, u)\end{aligned}\tag{2}$$

(2) モチーフの xy パターンの設定

モチーフの xy パターンについて次式で示す。

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 \cos[(s_2 t) \pi [\pi]/j_2] - y_0 \sin[(s_2 t) \pi [\pi]/j_2] \\y_1 &= x_0 \sin[(s_2 t) \pi [\pi]/j_2] + y_0 \cos[(s_2 t) \pi [\pi]/j_2]\end{aligned}\tag{3}$$

(3) モチーフの yz パターンの設定

モチーフの yz パターンについて次式で示す。(a: 円の半径)

$$\begin{aligned}x_2 &= (a + x_1) \cos(s_1 t) \pi / j_1 - \cos 0.5 \pi - \sin 0.5 \pi \sin((s_1 t) \pi / j_1) \\y_2 &= (a + x_1) \sin(s_1 t) \pi / j_1 - ((a + y_1) \cos 0.5 \pi + \sin 0.5 \pi \cos(s_1 t) \pi / j_1)\end{aligned}\tag{4}$$

(4) 3Dパターンのバリエーション生成のための設定

3Dパターン生成のために z 軸方向に式を加えたものを次式に示す。定数 w は, yz パターンの平面図における初期位置を設定するための定数である。 w は 0.125, 0.5, 1 の数値に選定し, 形状の異なるパターンの生成に適用する。 s_1 は, 軸における周期値, s_2 は, モチーフの周期値を決定する定数であり, $s_1 = d\pi/j_1$, $s_2 = e\pi/j_2$ で示す。

$$\begin{aligned}x_3 &= (x_2) \cos \pi / w - (y_2) \sin \pi / w \\y_3 &= (x_2) \sin \pi / w + (y_2) \cos \pi / w \\z_3 &= (a + y_1) \sin 0.5 \pi\end{aligned}\tag{5}$$

(5) 線形状のモチーフの設定

線形状のモチーフの設定において, 汎用黄金楕円については式 1 で示したが, 外サイクロイドと内サイクロイドについては, 式 6 と式 7 で示す。(a1: 大円の半径, b1: 小円の半径)

$$\begin{aligned}a_2 &= (a_1 + b_1) \cos(u+t) - b_1 \cos((a_1 + b_1)(u+t)/b_1) \\b_2 &= (a_1 + b_1) \sin(u+t) - b_1 \sin((a_1 + b_1)(u+t)/b_1)\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}a_3 &= (a_1 - b_1) \cos(u+t) + b_1 \cos((a_1 - b_1)(u+t)/b_1) \\b_3 &= (a_1 - b_1) \sin(u+t) - b_1 \sin((a_1 - b_1)(u+t)/b_1)\end{aligned}\tag{7}$$

4. 円を軸とした3Dパターンの生成

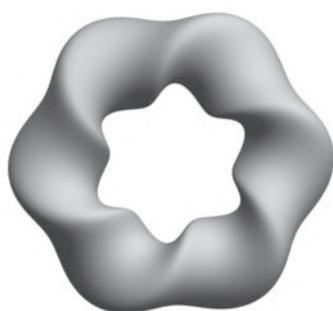
式 6 に基づいて, 選定したモチーフを適用し, 円を軸として生成した3Dパターンのバリエーションを図 6 ~ 図 8 に示す。

4.1. 汎用黄金楕円をモチーフとした3Dパターンの生成

汎用黄金楕円をモチーフとし円を軸とした3Dパターンのバリエーションの生成を図 6 に示す。



(a) $a=8, j_1=20, j_2=20, d=1, e=5/3, w=0.125$



(b) $a=7, j_1=50, j_2=20, d=2.5, e=1, w=1$



(c) $a=6, j_1=35, j_2=20, d=1.5, e=0.5, w=0.5$



(d) $a=6, j_1=20, j_2=20, d=1.25, e=0.5, w=0.5$



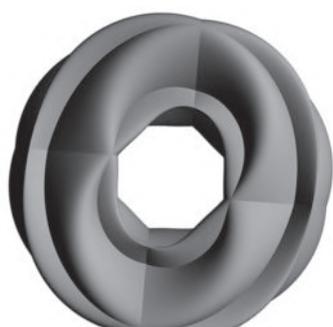
(e) $a=6, j_1=20, j_2=20, d=1, e=2, w=0.125$



(f) $a=5, j_1=5, j_2=20, d=1.5, e=1.5, w=0.125$



(g) $a=6, j_1=20, j_2=20, d=1, e=2, w=0.125$



(h) $a=6, j_1=20, j_2=20, d=2, e=1, w=0.125$



(i) $a=6, j_1=35, j_2=20, d=1.5, e=2, w=0.5$

図6 汎用黄金楕円をモチーフとし円を軸とした3Dパターンの例

4.2. 外サイクロイドをモチーフとした3Dパターンの生成

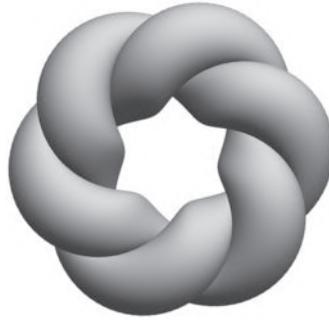
外サイクロイドをモチーフとし円を軸とした3Dパターンのバリエーションを図7に示す。

4.3. 内サイクロイドをモチーフとした3Dパターンの生成

内サイクロイドをモチーフとし円を軸とした3Dパターンのバリエーションを図8に示す。



(a) $a_1=3.0$ $b_1=1$, $j_1=20$, $j_2=20$, $d=1$, $e=1$



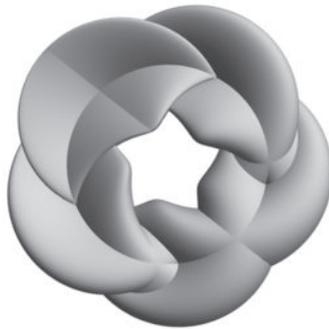
(b) $a_1=2$, $b_1=1$, $j_1=20$, $j_2=20$, $d=1$, $e=2$



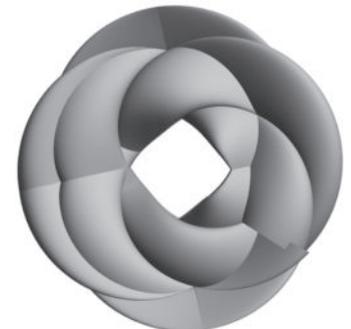
(c) $a_1=3$, $b_1=1$, $j_1=20$, $j_2=20$, $d=1$, $e=2$



(d) $a_1=4$, $b_1=1$, $j_1=40$, $j_2=20$, $d=1$, $e=2.0$



(e) $a_1=2$, $b_1=1$, $j_1=20$, $j_2=20$, $d=1$, $e=2.5$



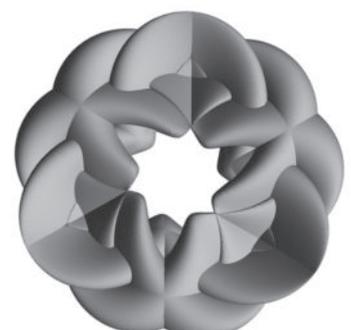
(f) $a_1=5$, $b_1=1$, $j_1=20$, $j_2=20$, $d=1$, $e=0.8$



(g) $a_1=6$, $b_1=1$, $j_1=10$, $j_2=10$, $d=1$, $e=7/8$



(h) $a_1=6$, $b_1=1$, $j_1=10$, $j_2=10$, $d=1$, $e=7/8$



(i) $a_1=3$, $b_1=1$, $j_1=10$, $j_2=10$, $d=1$, $e=9/7$

図7 外サイクロイドをモチーフとし円を軸とした3Dパターンの例

5. 考察

5.1. 3D パターンの特徴

選定した2次曲線をモチーフとし、円を軸とした3Dパターンのバリエーションを生成した。その特徴について、モチーフごとに次のようにまとめることができる。生成した3Dパターンの特徴としては面形状と開口部の形があげられる。

(1) 汎用黄金楕円をモチーフとした場合

汎用黄金楕円をモチーフとして生成した3Dパターンについては次の通りである。

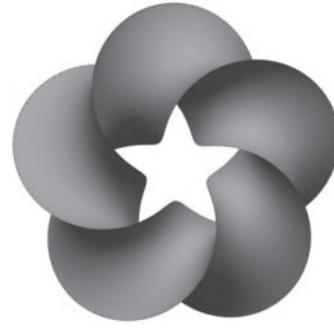
図6aと図6bは、均一な面形状であり、開口部の形は、図6aが隅肉の正方形、図6bが隅肉の近似星型正6角形である。図6cと図6dは、スパイラルによって面分割した曲面の例であり、分割数は、図6cが3、図6dが8である。開口部の形は、図6cが円弧3角形、図6dが正8角形である。図6e~図6iは、凸な曲面の分割数を変更



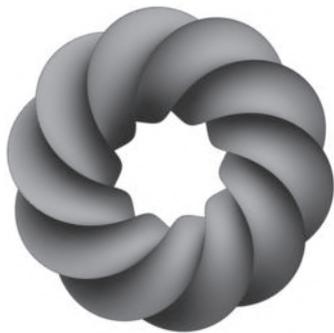
(a) $a_1=3, b_1=1, j_1=20, j_2=20, d=1, f=4/3, w=1$



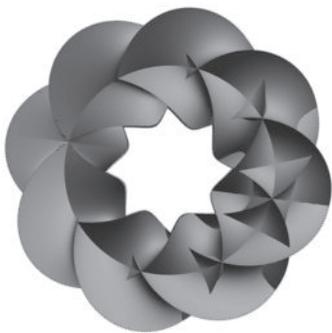
(b) $a_1=6, b_1=1, j_1=20, j_2=20, d=1, e=1, w=1$



(c) $a_1=3, b_1=1, j_1=20, j_2=20, d=1, e=4/3, w=1$



(d) $a_1=4, b_1=1, j_1=10, j_2=10, d=1, e=1, w=0.125$



(e) $a_1=4, b_1=1, j_1=10, j_2=10, bd=1, e=0.5, w=0.125$



(f) $a_1=4, b_1=1, j_1=20, j_2=20, d=1, e=1, w=1$



(g) $a_1=6, b_1=1, j_1=10, j_2=10, d=1, e=1, w=0.125$



(h) $a_1=4, b_1=1, j_1=20, j_2=20, d=1, e=2, w=1$



(i) $a_1=4, b_1=4, j_1=20, j_2=20, d=1, e=3, w=1$

図8 内サイクロイドをモチーフとし円を軸とした3Dパターンの例

することで生成した面形状のバリエーションの例である。開口部の形は、図6eが隅肉の3角形、図6fが隅肉の星型6角形、図6gが正7角形、図6hが正8角形、図6iが星型正9角形である。図6hは正8角形、図6iは凸な曲面の分割数を変更することで生成した面形状のバリエーションの例である。

(2) 外サイクロイドをモチーフとした3Dパターンの場合

外サイクロイドをモチーフとした3Dパターンの生成については次の通りである。

図7a～図7dは、複数のスパイラルで分割した凸な曲面の例である。分割数は、図7aが3、図7bが6、図7cが7、図7dが6である。各図の開口部の形は、図7aが円弧3角形、図7bが星型正6角形、図7cが正7角形、図7dが正6角形である。図7e～図7iは、凸な曲面の分割数を変更することで生成した例である。開口部の形は、図7eが星型正5角形、図7fが正方形、図7gが正6角形、図7hが正9角形、図7iが星型9角形である。

(3) 内サイクロイドをモチーフとした場合

内サイクロイドをモチーフとして生成した3Dパターンについては次の通りである。

図8a~図8dは、らせん面をユニットとして生成した例である。ユニットの個数は、図8aが4、図8bが6、図8cが5、図8dが10である。図8eは、らせん面をさらに細かく分割した例である。開口部の形は、図8aが正方形、図8bが正六角形、図8cが星型正五角形、図8dが星型正十角形、図8eが星型正八角形である。図8f~図8iは、モチーフの周期値、軸の周期値、周期パターンの初期位置の設定により生成したバリエーションである。開口部の形は、図8fが正方形、図8gが星型正六角形、図8hが星型正八角形、図8iが星型正十二角形である。

5.2.3Dパターン生成のまとめ

本稿における3Dパターン生成の試行について次のようにまとめることができる。

(1) 3Dパターン生成システムについて

- xyパターンをアフィン変換しyzパターンを生成した。このyzパターンを適用することにより、3Dパターン生成への活用を図った。その有用性についてはある程度検証することができた。
- yzパターンの平面図における初期位置を設定するために定数 w を適用した。これにより、3Dパターンのバリエーションを生成できることが確認できた。

(2) 面形状の生成の方法について

面形状を生成するために、パラメータを追加し帯形状の3Dパターンの初期設定に適用した。帯の幅の数値を増加させることで面形状の生成に有用であることが確認できた。

(3) 面形状の分類

面形状について次の通り分類することができる。

(a) 均一な面

汎用黄金楕円と外サイクロイドをモチーフとした場合、モチーフの自転の周期値、軸の周期値の設定により、均一な曲面を生成することができた。

(b) 凸な面

汎用黄金楕円と外サイクロイドをモチーフとした場合、凸な曲面が分割された形状で生成できる。内サイクロイドをモチーフとした場合、凸な面を分割することで様々なバリエーションを生成することができた。

(c) らせん面

内サイクロイドをモチーフとした場合、らせん面をユニットとしたバリエーションを生成することができた。

(d) 面の分割

各3Dパターンの面分割は、モチーフの周期値、軸の周期値、yzパターンの初期位置の設定によって生成することができた。

(e) 開口部の形

各3Dパターンの開口部の形は、汎用黄金楕円の長軸の値、外サイクロイドと内サイクロイドは、大円と小円の半径の値と軸である円の半径の値の設定で決定した。

6. まとめ

本稿では、2次曲線をモチーフとして、円を軸とした3Dパターンの生成を行った。新規に設定した点は次の通りである。第1に、帯形状を生成するためにパラメータを追加した。第2に、xy平面における周期パターンをアフィン変換しyzパターンを構築した。第3に、yzパターンの初期位置を設定した。第4に、yzパターンを円を軸として平行移動した。以上をまとめると、本稿における3Dパターンは、円を軸として2次曲線をユニットとしてらせん運動させることによって生成したと言える。結果として、本稿は、ある程度の3Dパターンの生成

における有用性について確認することができた。

参考文献

- [1] 森田克己, “楕円をモチーフとした幾何学模様生成”, 図学研究 第49巻3号通巻147号, 日本図学会(2015), pp.3-11
- [2] 森田克己, “周期関数を適用した幾何学模様生成システムの構築”, 札幌大谷大学・札幌大谷大学短期第学部紀要 第45号, (2015), pp.105-117
- [3] 森田克己, “周期関数を適用した幾何学模様生成システム2の構築”, 札幌大谷大学・札幌大谷大学短期第学部紀要 第46号, (2016), pp.31-41
- [4] 前掲載書[3]